Lección n°9: Representables, adjuntos y Lema de Yoneda. EPN, 2021

En esta última lección expresaremos algunos resultados y conceptos vinculados a los funtores $\mathrm{Hom}(-, A)$ y $\mathrm{Hom}(A, -)$, en un categoría localmente pequeña $\mathscr{A}$, que nos demuestran que su aplicación es, en realidad, de una gran generalidad.

18. Funtores adjuntos

Los conceptos hasta ahora vistos, han permitido comparar un par de funtores paralelos

$$\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathscr{B}.$$

Por ejemplo, podemos verificar si son isomorfos naturalmente o no. Por otro lado, ¿Qué podemos decir de un par de funtores con direcciones opuestas?

$$\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}$$

y ¿Cuál es la relevancia de compararlos? Esto motiva otro concepto insigne de la teoría de categorías.

Definición. *Dado un par de funtores en direcciones opuestas*

$$\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}.$$

Entonces F se dice ***adjunto (por la izquierda)*** *de G y G un* ***adjunto (por la derecha)*** *de F, y lo escribimos como $F \dashv G$, si es que los funtores*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(-), -) : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{B} \longrightarrow \textbf{\textit{Set}}$$

y

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, G(-)) : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{B} \longrightarrow \textbf{\textit{Set}},$$

donde $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(-), -) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(-, -) \circ (F^{op}, 1_{\mathscr{B}})$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, G(-)) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, -) \circ (1_{\mathscr{A}}^{op}, G)$*; son isomorfos naturalmente.*

Observación 44. *Escribir $F \dashv G$ es equivalente a que para, todo $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ y $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})$, se tenga que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, G(B)),$$

naturalmente. Esto ultimo quiere decir, en primer lugar, que para cada flecha

$$f : F(A) \to B,$$

en $\mathscr{A}$ existe una única flecha

$$\overline{f} : A \to G(B),$$

a la que es común llamarla el ***adjunto*** *de f. Al inverso de este isomorfismo lo denotaremos también por el mismo símbolo, así tenemos que $\overline{\overline{f}} = f$.*

Por otro lado, el diagrama de naturalidad correspondiente nos dice, en este contexto, que para todo $g : A' \to A \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$ y todo $h : B \to B' \in \mathrm{Hom}(\mathscr{B})$, se debe cumplir la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), B) \arrow[r, "(^{-})"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(g),h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, G(B)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(g,G(h))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A'), B') \arrow[r, "(^{-})"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A', G(B'))
\end{tikzcd}$$

donde $(^{-})$ no es más que la función que asigna a cada flecha f su adjunto $\overline{f}$.

Ahora, recordando como actúa el funtor $\mathrm{Hom}(-,-)$ en flechas (por ejemplo, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(g), h)(f) = (F(g)^*, h_*)(f) = hfF(g)$), se tiene que, la conmutatividad del diagrama natural, es equivalente a decir que para todo $f : F(A) \to B$

$$\overline{hfF(g)} = G(h)\overline{f}g,$$

o alternativamente, dado que $(^{-})$ denota su propio inverso, a que para todo $l : A \to G(B)$

$$h\overline{l}F(g) = \overline{G(h)lg}.$$

Se puede comprobar que cualquiera de estas condiciones se puede simplificar, de tal manera que obtenemos que la operación $(^{-})$ cumple, para todo $f : F(A) \to B$ y $l : A \to G(B)$

$$\overline{hf} = G(h)\overline{f} \quad y \quad \overline{lg} = \overline{l}F(g),$$

la cual es muchó más fácil de comprobar en la práctica.

Encontrar adjuntos se considera como una forma de relacionar procesos que no son inversos pero que tienen cierta familiaridad, en el sentido de que toda flecha $f : G(B) \to A$ genera una única flecha $\overline{f} : B \to F(A)$. Es usual que se considere una adjunción como lo mejor que se puede tener a falta de un inverso, o que es un "inverso conceptual".

La razón del nombre "funtor adjunto" se debe a que es similar a otros procesos matemáticos, por ejemplo, un operador acotado T en un espacio de Hilbert H con producto interno $\langle .,. \rangle$ cumple, por el isomorfismo de Riesz, en que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle,$$

para todo $x, y \in H$, donde T^* es su operador adjunto. El lector debe notar la similitud de esta relación, con respecto a la que establecen F y G, funtores adjuntos, en los hom-sets.

> **Ejemplo 18.1.** *En Álgebra es usual que "Libre $\dashv$ Olvidadizo", es decir, que un funtor olvidadizo $U : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$, con $\mathscr{A}$ una categoría concreta, de preferencia con objetos armados de una estructura algebraica, tiene, en general, un adjunto por la izquierda definido como un funtor libre.*

- *Sea k un campo, entonces tenemos la adjunción*

$$\mathbf{Vect}_k \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathbf{Set},$$

con $F \dashv U$. Aquí F es el funtor libre que asigna a un conjunto S, el espacio vectorial libre generado por S, el cual recordemos, está conformado por sumas formales

$$\sum_{s \in S} a_s s,$$

donde $a_s \in K$ y es igual a 0, excepto para un numero finito de índices s. Por otro lado, U es el funtor olvidadizo que asigna a un espacio vectorial V su conjunto subyacente $U(V)$.

Ahora, construyamos una biyección

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_k}(F(S), V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, U(V)),$$

para todo S, conjunto, y V, espacio vectorial.

Dada una flecha $g : F(S) \to V$ en $\mathbf{Vect}_k$ es decir, una aplicación lineal, entonces definimos una función de conjuntos $\overline{g} : S \to U(V)$ simplemente como $\overline{g}(s) = g(s)$.

Por otro lado, si es que tenemos una función de conjuntos

$$f : S \to U(V),$$

entonces se define una aplicación lineal $\overline{f} : F(S) \to V$, dada por su extensión lineal, es decir

$$\overline{f}(\sum_{s \in S} a_s s) = \sum_{s \in S} a_s f(s).$$

Cualquiera de estas operaciones son el isomorfismo requerido, pues son inversas una de la otra; es decir $\overline{\overline{f}} = f$ y $\overline{\overline{g}} = g$ para toda función de conjuntos $f : S \to U(V)$ y toda aplicación lineal $g : F(S) \to V$. Esto no es difícil de comprobar.

También se debe verificar que este isomorfismo es natural, en nuestro caso esto se reduce a comprobar que para todo $g : F(S) \to V$ y $q : V \to V'$ lineales se tiene que

$$\overline{q \circ g} = U(q) \circ \overline{g},$$

y que para todo $f : S \to U(V)$, $p : S' \to S$ funciones de conjuntos se tiene que

$$\overline{f \circ p} = \overline{f} \circ F(p),$$

lo cual se deja como ejercicio.

- *Se tiene de manera similar adjunciones*

$$\mathbf{Mon} \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathbf{Set},$$

$$\mathbf{Grp} \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathbf{Set},$$

con $F \dashv U$, donde F es el funtor que manda cada conjunto a su monoide y grupo libre, respectivamente.

De hecho, en general, para cualquier objeto libre $F(X)$ con X conjunto y para cualquier flecha $g : F(X) \to A$ en un categoría concreta $\mathscr{A}$, podemos determinar un único $\overline{g} : X \to U(A)$ con $\overline{g} = U(g) \circ i$ donde $i : S \to U(F(X))$ es la inclusión que siempre existe para todo objeto libre.

Ahora, usando la propiedad universal del objeto libre, tenemos también que para cada $f : X \to U(A)$ existe un único $\overline{f} : F(X) \to A$, tal que $U(\overline{f})i = f$. Entonces así, en este contexto, es solo cuestión de verificar las igualdades que nos garantizan que estos isomorfismos $f \to \overline{f}$, $g \to \overline{g}$, son naturales.

Ejemplo 18.2. *Consideremos para cualquier categoría $\mathscr{A}$, el único funtor*

$$F : \mathscr{A} \to \mathbf{1},$$

donde $\mathbf{1}$ es la categoría con un solo objeto 1 y flecha. ¿Qué significaría la existencia de funtores adjuntos a F?

En primer lugar, un funtor adjunto debería ser de la forma $G : \mathbf{1} \to \mathscr{A}$; viéndolo como elemento generalizado, es un objeto $G \in \mathscr{A}$, es decir identificamos G con $G(1)$.

Ahora, si es que es un adjunto por la derecha, debemos tener una biyección

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{1}}(1,1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, G).$$

para todo $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, es decir que cada conjunto $\mathrm{hom}_{\mathscr{A}}(A, G)$ consta exactamente de un elemento, por tanto G es en realidad un objeto final. De manera análoga, si G es adjunto por la izquierda, entonces visto como objeto, es un objeto inicial.

Ejemplo 18.3. *Dado un anillo R, el cual suponemos por facilidad que es conmutativo, y consideramos un objeto A de $\mathbf{Mod}_R$; entonces se tiene que*

$$(-) \otimes_R A \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(A, -).$$

En efecto, como R es conmutativo entonces todo módulo lo es por ambos lados y es un bimódulo. Luego, por los resultados de la anterior lección, para cada B y C en $\mathbf{Mod}_R$ se tiene que $B \otimes_R A$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(A, C)$ también están armados de una estructura de R-módulo.

Así, ambos funtores son $\mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$ y tiene sentido buscar la biyección:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(B \otimes_R A, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(B, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(A, C)),$$

requerida. Para probar lo anterior consideramos un R-mapa

$$f : B \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(A, C),$$

ahora, sea la función

$$h : B \times A \to C,$$

definida por $h(b, a) = (f(b))(a)$, para todo a y b. Esta función es bilineal, pues para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ y $r \in R$ se tiene que

$$h(b + b', a) = (f(b + b'))(a) = (f(b) + f(b'))(a) = (f(b))(a) + (f(b'))(a) = h(b, a) + h(b', a).$$

De manera análoga, $h(b, a + a') = h(b, a) + h(b, a')$ *y* $h(rb, a) = (f(rb))(a) = (rf(b))(a) = (f(b))(ra) = h(b, ra) = rh(b, a)$.

Por tanto, podemos usar la segunda propiedad universal del producto tensorial y obtenemos que existe un único R-mapa

$$B \otimes_R A \to C,$$

al cual llamamos $\overline{f}$ *tal que* $\overline{f}(b \otimes a) = h(b, a)$ *para todo* $a \in A$, $b \in B$.

Como la asignación $f \to \overline{f}$ *es única entonces hemos encontrado el isomorfismo deseado, solo debemos verificar la naturalidad del mismo, el cual omitimos.*

Es claro que si $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *es un isomorfismo de categorías entonces* $F^{-1} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *es un adjunto por la izquierda y también por la derecha, asignando para cada* $f : F(A) \to B$ *la flecha*

$$\overline{f} = F^{-1}(f) : A \to F^{-1}(B).$$

Por otro lado, no toda equivalencia tiene un adjunto, pero la siguiente caracterización nos dice que en ese caso solo se necesita verificar una propiedad universal.

Teorema 18.4. *Dados dos funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

entonces $F \dashv G$ *si y solo si* F *es una equivalencia,* G *es su pseudo-inverso y la respectiva transformación natural* $\eta : 1_{\mathscr{A}} \to G \circ F$ *cumple la siguiente propiedad universal:*
Para todo $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})$ *y* $l : A \to G(B)$, *existe un único* $f : F(A) \to B$ *tal que*

$$l = G(f)\eta_A.$$

Más aún, ambas condiciones se relacionan por las siguientes igualdades

$$\bar{l} : G(l)\eta_A,$$

$$\eta_A = \overline{1_{F(A)}}.$$

Demostración. Ejercicio. *Pista:* Use las fórmulas escritas al final del enunciado del teorema, además de las ya conocidas

$$\overline{hf} = G(h)\overline{f} \quad \text{y} \quad \overline{lg} = \bar{l}F(g),$$

para definir una transformación natural o un isomorfismo natural, respectivamente. □

Observación 45. *Por lo anterior, todo funtor adjunto es una equivalencia.*

19. Representables

En esta sección también usaremos la notación H^A y H_A, para referirnos a los funtores $\mathrm{Hom}(A, -)$ y $\mathrm{Hom}(-, A)$, respectivamente.

Definición. *Un funtor*

$$F : \mathscr{A} \to \textbf{\textit{Set}}.$$

*se dice **representable** si existe un* $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ *tal que*

$$F \cong H^A$$

en la categoría $[\mathscr{A}, \textbf{\textit{Set}}]$*. La elección de un objeto* A *y un isomorfismo natural* $\psi : F \dot{\to} H^A$*,, tal que se cumpla lo anterior, se llama una **representación** de* F*.*

Por otro lado, un funtor contravariante

$$G : \mathscr{A}^{op} \to \textbf{\textit{Set}},$$

se dice representable si existe un $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ *tal que*

$$G \cong H_A,$$

en la categoría $[\mathscr{A}^{op}, \textbf{\textit{Set}}]$*. Una representación es, otra vez, una elección de un objeto e isomorfismo natural.*

Observación 46. *Podemos pensar que un funtor representable es difícil de encontrar, después de todo su comportamiento se puede determinar enteramente por un solo objeto* A *y por las flechas que van o vienen del mismo. Sin embargo, como veremos más adelante, siempre podemos rescatar un funtor representable de cada categoría.*

Este resultado se conoce como Lema de Yoneda y podemos pensarlo, intuitivamente, como el hecho de que no existe pérdida de información al cambiar nuestra perspectiva de objetos a flechas. Algo que ya hemos hecho, en repetidas ocasiones, en el producto de objetos, en los elementos generalizados y en los mono y epimorfismos.

Ejemplo 19.1.

- $\mathscr{P} \cong H_{\mathbf{2}}$, *donde* $\mathscr{P}$ *es el funtor contravariante que, ya hemos visto, asigna a cada conjunto* X *su conjunto partes* $\mathscr{P}(X)$ *y* $\mathbf{2}$ *es la categoría discreta con dos objetos.*

  En efecto, $\mathscr{P}(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \mathbf{2})$ *naturalmente, pues para cada conjunto* $A \subseteq X$*, podemos asignar una única función indicatriz* $i_A^X : X \to \mathbf{2}$ *con* $i_A^X(x) = 1$ *si* $x \in A$ *y* 0 *caso contrario.*

  Entonces para todo $f : X \to Y$*, función de conjuntos, el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}(Y) \arrow[r, "\mathscr{P}(f)"] \arrow[d, "i_{-}^{Y}"] & \mathscr{P}(X) \arrow[d, "i_{-}^{X}"] \\ \mathrm{Hom}(Y,2) \arrow[r, "f^*"'] & \mathrm{Hom}(X,2) \end{tikzcd}$$

  con $\mathscr{P}(f)(B) = f^{-1}(B) \in \mathscr{P}(X)$ *para todo* $B \in \mathscr{P}(Y)$*.*

- *Un resultado similar en **Top** es válido.*

  Sea $\mathbf{2}$ *como antes la categoría discreta con dos elementos, es decir un conjunto* $S = \{0, 1\}$*. En este conjunto definimos la topología*

$$\tau = \{\varnothing, S, \{1\}\}.$$

  A S*, armado de esta topología, se le conoce como **Espacio de Sierpinsky** y tiene la siguiente propiedad:*

Sea $A \subseteq X$ un abierto en algún espacio topológico X, entonces le corresponde una única función, que al igual que antes será la indicatriz $i_A^X : X \to S$, la cual es continua porque $(i_A^X)^{-1}(1) = A$, $(i_A^X)^{-1}(S) = X$ y $(i_A^X)^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Por tanto, si consideramos $\mathscr{O}$, el funtor contravariante que envía un espacio topológico X al conjunto de todos sus subconjuntos abiertos, es decir su topología $\mathscr{O}(X)$; tendremos de forma análoga que

$$\mathscr{O} \cong H_S.$$

- *En $\mathbf{Vect}_k$ se tiene que $(-)^* = \mathrm{Hom}(-, k)$, con lo cual es un funtor contravariante representable.*

Los ejemplos de funtores covariantes representables son más abundantes.

Ejemplo 19.2.

- *Recuérdese la perspectiva de que un elemento $x \in S$, en cualquier conjunto, se puede ver como una función $x : 1 \to S$ con $x(1) = x$, es decir, como un elemento generalizado de forma 1.*

  Esto se puede formalizar fácilmente con el isomorfismo

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, S) \cong S,$$

  para todo conjunto S; claramente, este isomorfismo natural. Luego

  $$1_{\mathbf{Set}} \cong H^1.$$

  De forma más general, tenemos un funtor

  $$\mathrm{ob} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Set}$$

  que asigna a cada categoría $\mathscr{A}$ (pequeña), su conjunto de objetos $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$.

  Entonces, por un argumento similar, usando la categoría $\mathbf{1}$, con un solo objeto, tenemos que

  $$\mathrm{ob} \cong H^{\mathbf{1}}.$$

- *Para cada número primo p, consideramos el funtor*

  $$F_p : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set},$$

  donde se cumple que

  $$F_p(G) = \{x \in G \ : \ x^p = e_G\},$$

  es decir, es el subconjunto de todos sus elementos de orden p. Notemos que cualquier homomorfismo $f : \mathbb{Z}_p \to G$ determina un único elemento $x \in F_p(G)$, con $f(1) = x$, ya que $x^p = (f(1))^p = f(p) = f(0) = e_G$.

  De manera conversa, si es que tenemos $F_p(G)$, entonces para cada $x \in G$, podemos definir un homomorfismo $f : \mathbb{Z}_p \to G$ con $f(1) = x$, gracias a que 1 es generador de $\mathbb{Z}_p$. Además, como p es primo, esta función está determinada únicamente. Luego

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}_p, -) \cong F_p,$$

  más aún, este isomorfismo es natural, lo cual se deja como verificación.

- *Consideremos el funtor grupo fundamental*

$$\pi_1 : \mathbf{Toph}^* \to \mathbf{Grp}.$$

Ahora, recordemos que para cada X espacio topológico, se tiene que $\pi_1(X)$ consta de clases de homotopía de lazo de, valga la redundancia, lazos en X.

Los lazos en X los podemos ver, en analogía con los caminos que son funciones $[0,1] \to X$, como funciones

$$\mathbb{S}^1 \to X$$

donde $\mathbb{S}^1$ es el circulo unitario.

No demostraremos lo siguiente, pero lo anterior es la observación básica para tener que

$$U \circ \pi_1 \cong \mathbf{Toph}^*(\mathbb{S}^1, -)$$

donde $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ es un funtor olvidadizo. Así, esta composición, es representable.

Lema 19.1. *Si $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ y $F \dashv G$ y dado un $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, entonces se tiene que el funtor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, G(-)) : \mathscr{B} \to \mathbf{Set}$$

con $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, G(-)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -) \circ G$, es representable.

Demostración. Gracias a que son funtores adjuntos entonces con A fijo, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, G(B)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), B)$$

para todo B, naturalmente.

Por tanto, hemos obtenido que

$$\mathrm{Hom}_A(A, G(-)) \cong \mathrm{Hom}_B(F(A), -) = H^{F(A)}.$$

□

Teorema 19.3. *Todo funtor $U : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ que tiene un adjunto por la izquierda es representable.*

Demostración. Como ya hemos visto en los ejemplos anteriores, si 1 es cualquier conjunto unitario, entonces

$$\mathbf{Set}(1, U(A)) \cong U(A)$$

naturalmente, para cada $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$. Luego, y usando también el anterior lema, se tiene que

$$U \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, U(-)) \cong H^{F(1)}$$

Así U es representable. □

En particular, si U es un funtor olvidadizo y tiene como adjunto por la izquierda, a un funtor libre F, entonces U estará representado por el objeto libre $F(1)$, es decir el objeto libre generado por un conjunto unitario (recordemos que no importa cuál, ya que todo objeto libre es único salvo isomorfismo y cardinalidad).

Por ejemplo (siendo estrictos es necesario, al igual que en la anterior sección, verificar que estos funtores tienen adjuntos por la izquierda los cuales son los funtores libres descritos), si es que consideramos el funtor olvidadizo

$$U : \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set},$$

entonces como $F(1) = k$ (el espacio vectorial libre sobre k, de un conjunto unitario, es k mismo), se concluye que $U \cong H^k$.

Si es que, por otro lado, tomamos el funtor

$$U : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Set},$$

entonces como $F(1)$, el anillo conmutativo libre generado por un conjunto unitario, es $\mathbb{Z}[x]$; tenemos así que $U \cong H^{\mathbb{Z}[x]}$.

20. Lema de Yoneda

Siguiendo con la teoría general, notemos que

$$H_A = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A) : \mathscr{A}^{op} \to \mathbf{Set},$$

por tanto, podemos definir

$$H_{(-)} : \mathscr{A} \to [\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}],$$

el cual es un funtor, con $H_{(-)}(A) = H_A$ y $H_{(-)}f = H_f = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, f)$ para cada objeto A y flecha f. Se puede verificar que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, f) \cdot \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, g) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, fg),$$

donde $\cdot$ es la composición vertical en $[\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]$.

De igual manera, se tiene un funtor $H^{(-)} : \mathscr{A}^{op} \to [\mathscr{A}, \mathbf{Set}]$, definido de la manera obvia, que cumple con ser $H_{(-)}$ si es que $\mathscr{A}$ se remplaza por su categoría opuesta.

Por tanto, le daremos más relevancia a $H_{(-)}$ y lo nombraremos como **Incrustación de Yoneda**, en inglés, "Yoneda's Embedding". Todo lo que demostraremos para el mismo tendrá una proposición dual, válida para $H^{(-)}$, al que llamaremos su contravariante.

Este funtor es central para formular el famoso resultado:

Teorema 20.1 (Lema de Yoneda)**.** *Para toda categoría $\mathscr{A}$ (localmente pequeña) se tiene que*

$$\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_A, X) \cong X(A),$$

naturalmente, para todo A en $\mathscr{A}$ y X en $[\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]$.

Observación 47. *Que el isomorfismo aquí sea natural significa que los funtores*

$$\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_{(-)}, -) := \mathrm{Hom}(-, -) \circ (H^{op}_{(-)}, 1_{[\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]})$$

y $Eval : \mathscr{A}^{op} \times [\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$, definido por $Eval(A, X) = X(A)$; sean isomorfos naturalmente.

Esto, análogo a como se hizo con los funtores adjuntos, es equivalente a las dos siguientes condiciones:

1) Naturalidad en A: Para cada flecha $h : A \to A'$ en $\mathscr{A}$ y cada X en $[\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op},\mathbf{Set}]}(H_{A'}, X) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op},\mathbf{Set}]}(H_h,1)"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op},\mathbf{Set}]}(H_A, X) \arrow[d, "\cong"] \\
X(A') \arrow[r, "X(h)"] & X(A)
\end{tikzcd}$$

2) Naturalidad en X: Para cada transformación natural $v : X \dot{\to} X'$ entre funtores $\mathscr{A}^{op} \to \mathbf{Set}$ y cada A en $\mathscr{A}^{op}$, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op},\mathbf{Set}]}(H_A, X) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op},\mathbf{Set}]}(1,v)"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op},\mathbf{Set}]}(H_A, X') \arrow[d, "\cong"] \\
X(A) \arrow[r, "v_A"] & X'(A)
\end{tikzcd}.$$

Demostración. La idea es la siguiente, consideramos cualquier transformación natural

$$\alpha : H_A \dot{\to} X,$$

y lo que haremos es asignarle el elemento $\alpha_A(1_A) \in X(A)$, esto tiene sentido pues $1_A \in H_A(A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A)$.

Probemos que esta asignación es un isomorfismo, y lo notaremos así, posteriormente, como $\cong$.

Para ello, observemos que esta asignación es inyectiva, porque si es que tenemos otra transformación natural $\beta : H_A \to X$ tal que $\alpha_A(1_A) = \beta_A(1_A)$, entonces se tiene que

$$\alpha_B = \beta_B,$$

para todo B en $\mathscr{A}$.

En efecto, tomamos cualquier B, y luego cualquier $f \in H_A(B) = \mathrm{Hom}(B, A)$. Como α es transformación natural, sabemos, por la definición, que

$$X(f)(\alpha_A) = \alpha_B f^*,$$

como funciones

$$\mathrm{Hom}(A, A) \to X(B).$$

Así, eligiendo $1_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$, tenemos que

$$X(f)(\alpha_A(1_A)) = \alpha_B(1_A \circ f) = \alpha_B(f), \tag{1}$$

de donde

$$\alpha_B(f) = X(f)(\alpha_A(1_A)) = X(f)(\beta_A(1_A)) = \beta_B(f),$$

por consiguiente, $\alpha = \beta$.

Probemos ahora que es sobreyectiva. Tomemos cualquier $p \in X(A)$, definimos una transformación natural $\alpha : H_A \to X$ tal que $\alpha_A(1_A) = p$ como sigue.

Para cada B en $\mathscr{A}$, definimos cada componente como $\alpha_B : \mathrm{Hom}(B, A) \to X(B)$ declarando que $\alpha_B(h) = X(h)(p)$ para todo $h : B \to A$. Es claro que $\alpha_A(1_A) = p$. Es transformación natural porque se cumple la siguiente igualdad, para todo $f : C \to B$

$$\begin{aligned}\alpha_C \circ \mathrm{Hom}(f, A)(h) =& \alpha(h \circ f),\\ =& X(h \circ f)(p),\\ =& X(f) \circ X(h)(p),\\ =& X(f)\alpha_B(h);\end{aligned}$$

por tanto $\alpha_C \circ H_A = X \circ \alpha_B$.

Se deja como ejercicio probar que estas asignaciones son inversas, una de la otra, con lo cual se encuentra que $\alpha \mapsto \alpha_A(1_A)$ es isomorfismo.

Para comprobar que este isomorfismo es natural en A, tomamos un $h : A \to A'$ cualquiera.

Es importante notar que H_h es una transformación natural

$$H_h : H_A \overset{\cdot}{\longrightarrow} H_{A'},$$

que actúa por post-composición, en el sentido de que en cada componente

$$(H_h)_B(f) = hf \in \mathrm{Hom}(B, A'),$$

para todo $f \in \mathrm{Hom}(B, A)$.

Por otro lado, la flecha $\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_h, 1)$ actúa por pre-composición, en el sentido de que, a cada transformación natural

$$\alpha : H_{A'} \overset{\cdot}{\longrightarrow} X,$$

le asocia la transformación natural

$$\alpha \cdot H_h : H_A \overset{\cdot}{\longrightarrow} X.$$

Con esto en mente, que el diagrama requerido conmute, es equivalente a que lo siguiente se cumpla para toda transformación natural $\alpha : H_{A'} \overset{\cdot}{\longrightarrow} X$:

$$X(h)(\alpha_{A'}(1_{A'})) = \alpha_A(H_h)_A(1_A) = \alpha_A(h),$$

pero lo anterior es, en realidad, la misma ecuación que (1).

Para la naturalidad con respecto a X, vemos que, para una transformación natural $v : X \overset{\cdot}{\to} X'$, se tiene que la flecha $\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(1, v)$ actúa por post-composición. Esto es, dado $\alpha : H_A \overset{\cdot}{\to} X$, se le asocia $v \cdot \alpha : H_A \overset{\cdot}{\to} X'$. Podemos ver así que el diagrama conmutativo solo nos pide que comprobemos

$$(v \cdot \alpha)_A(1_A) = v_\alpha(\alpha_A(1_A));$$

lo cual se obtiene, directamente, de la definición de composición vertical de transformaciones naturales. $\square$

Ejercicio 20.2. *¿Cuál es el enunciado dual del Lema de Yoneda, el cual usa el funtor contravariante $H^{(-)}$?*

Los corolarios del Lema de Yoneda nos hacen entender su importancia.

Teorema 20.3. *La incrustación de Yoneda (y su contraviante) es plena y fiel.*

Demostración. Dado cualquier $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$. Utilizamos el Lema de Yoneda con $X = H_B$ obteniendo así que

$$\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_A, H_B) \cong H_B(A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B),$$

por tanto $H_{(-)} : \mathscr{A} \to [\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ es pleno y fiel, por definición. Su contravariante cumple lo mismo, usadon el enunciado dual del lema de Yoneda. □

Observación 48. *En general, no se tiene que la incrustación de Yoneda es inyectiva en objetos (esto depende mucho de nuestra axiomatización al definir categorías), así que según nuestra definición de incrustación, no es propiamente una. Sin embargo, la definición de incrustación es usual que cambie cuando se trabaja en el ámbito de las* 2*-categorías para referirse a los funtores plenos y fieles, así que en ese contexto, que no exploramos a fondo, el nombre "incrustación de Yoneda", está justificado.*

En una categoría (localmente pequeña) $\mathscr{A}$ se tiene que que para todo $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$

$$A \cong B \iff H_A \cong H_B \iff H^A \cong H^B.$$

Más aún, se tiene que $A \cong B$ si y solo solamente si, para cualquier objeto C en $\mathscr{A}$ se satisface que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C, B),$$

naturalmente. O, de forma alternativa

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C),$$

naturalmente.

Demostración. En la primera afirmación, las dos implicaciones, se deducen directamente del anterior teorema y su dual, respectivamente.

La segunda afirmación se debe a la definición de los funtores representables H_A y H^A. □

El último resultado nos dice, de forma informal, que en teoría de categorías toda la información está codificada en las flechas y que si dos elementos son indistinguibles, desde la perspectiva de todas las flechas que van o llegan a ellos, deben ser prácticamente los mismos.

Podemos pensarlo como un análogo, en la matemática, a la ley llamada "Identidad de los indiscernibles", que es un axioma en muchas teorías filósoficas, aunque aquí ha sido completamente demostrado. La misma afirma, brevemente, que dos objetos son iguales cuando tienen todas sus propiedades posibles en común. Esta ley es atribuida a Leibniz.

En este mismo carácter, terminamos con una frase atribuida a Ravil Vakil, experto en geometría algebraica, cuando le pidieron explicar el lema de Yoneda. Traducido al expañol:

Trabajas en un acelerador de partículas y quieres entender o estudiar a una de ellas. Lo único que puedes hacer es hacerle colisionar con otras partículas. Si tú entiendes cómo tu partícula misteriosa responde a todos las pruebas que haces, con todas las partículas posibles y con todos los niveles de energía posibles; entonces tú sabes todo lo que hay que saber acerca de tu partícula misteriosa.